文章编号: 1673-064X(2011)02-0107-04

Smarandache *kn* 数列与除数和函数的混合均值

苟 素

(西安邮电学院 理学院,陕西 西安 710121)

摘要: 对任意整数 $1\leqslant k\leqslant 9$,如果数列 $\{a(k,n)\}$ 中的每一个数都可以分成两部分,使得第二部分是第一部分的 k 倍,则该数列称作 Smarandache kn 数字数列. 利用初等及组合方法研究 Smarandache kn 数字数列及除数和函数的混合均值性质,并给出一个有趣的渐近公式.

关键词: Smarandache kn 数字数列; 除数和函数; 混合均值; 渐近公式

中图分类号: O156.4 **文献标识码**: A

1 引言及结论

对任意正整数 k,著名的 Smarandache kn 数字数列 $\{a(k,n)\}$ 定义为一个按照自然顺序排列的正整数集合,使得该集合中的每一个数都可以分成两部分,其中第二部分是第一部分的 k 倍. 例如 Smarandache $3n$ 数字数列 $\{a(3,n)\}=\{13,26,39,412,515,618,721,824,\cdots\}$. 即就是 $3n$ 数字数列中的每一项都可以分成两部分,使得第二部分是第一部分的 3 倍. 这一数列是美籍罗马尼亚著名数论专家 F. Smarandache 教授在文献[1]中提出的,同时他建议人们研究该数列的各种性质. 然而,由于 Smarandache 教授所提出的有关 kn 数字数列的问题很笼统,所以很多学者不知道从何处下手,从而导致了这方面的研究很长时间没有进展. 自从张文鹏教授提出了"Smarandache $3n$ 数字数列中没有完全平方数"的猜测后,这方面的研究工作才有了实质性进展. 例如,武楠在文献[2]中证明了下面的结论:

(a) 当 n 为无平方因子数时,$a(3,n)$ 不可能是完全平方数;

(b) 当 n 为完全平方数时,$a(3,n)$ 不可能是完全平方数;

(c) 如果 $a(3,n)$ 是一个完全平方数,那么

$n=2^{2\alpha_1}\cdot 3^{2\alpha_2}\cdot 5^{2\alpha_3}\cdot 11^{2\alpha_4}\cdot n_1$, 其中 $(n_1,330)=1$.

文献[2]中的结论虽然没有完全解决张文鹏教授的猜想,但是在 Smarandache kn 数字数列性质的研究工作中取得了实质性进展. 受到文献[2]中思想的启发,笔者在文献[3]中研究了 $\ln a(3,n)$ 的均值性质,并给出了渐近公式:

$$\sum_{n\leqslant N}\ln a(3,n)=2N\cdot\ln N+O(N).$$

虽然这一渐近公式是非常弱的,有进一步改进的余地,但是至少找到了研究 Smarandache kn 数字数列性质的另一个突破口. 关于这一数列的其他性质,至今似乎没有人研究,至少没有在现有的文献中看到. 然而,研究这个数列的性质是有意义的,至少可以从不同角度找到研究这类数论问题的新方法,从而丰富数论

收稿日期: 2010-11-01
基金项目: 国家自然科学基金资助项目(编号: 11071194);陕西省教育厅资助项目(编号: 08JK433)
作者简介: 苟素(1972-),女,副教授,主要从事基础数学的研究. E-mail: gs1013@xupt.edu.cn

的研究内容,推动整个数学研究工作的发展. 本文的主要目的是研究 Smarandache kn 数字数列与除数和函数的混合均值性质,即研究

$$\sum_{n\leqslant x}\frac{\sigma(n)}{a(k,n)} \tag{1}$$

的均值性质,并给出一个有趣的均值公式,其中 $\sigma(n)$ 为除数和函数. 文中所涉及的初等数论知识可以在文献[4]及[5]中找到,这里不再重复. 基于素数的分布理论、$S(k,n)$ 的特殊结构,本文利用初等及组合方法给出了式(1)的一个较强的渐近公式. 具体地说也就是证明了下面 2 个定理:

定理 1 设 k 为整数且 $1\leqslant k\leqslant 9$,则对任意实数 $x>1$,得到渐近公式

$$\sum_{n\leqslant x}\frac{\sigma(n)}{a(k,n)}=\frac{3\pi^2}{k\cdot 20\cdot \ln 10}\cdot \ln x+O(1).$$

定理 2 设 p 为素数,k 为整数且 $1\leqslant k\leqslant 9$,那么对任意实数 $x>1$,得到渐近公式

$$\sum_{p\leqslant x}\frac{p}{a(k,p)}=\frac{9}{k\cdot 10\cdot \ln 10}\cdot \ln\ln x+O(1).$$

式中 $\sum\limits_{p\leqslant x}$ 表示对所有不大于 x 的素数求和.

2 定理的证明

下面利用初等方法、组合方法以及素数分布理论来完成定理的证明. 首先证明定理 1. 这里只证明定理 1 中 $k=2$ 及 $k=4$ 的情况. 类似地,可以推出定理 1 中 k 为其他正整数的情况. 首先证明 $k=2$. 考虑到 $a(2,n)$ 的结构,设 n 的十进制表示式为 k 位数,即就是 $n=c_kc_{k-1}\cdots c_2c_1$,其中 $1\leqslant c_k\leqslant 9, 0\leqslant c_i\leqslant 9, i=1,2,\cdots,k-1$. 于是由乘法的进位法则可知当 $10^{k-1}\leqslant n\leqslant 5\cdot 10^{k-1}-1$ 时,$2n$ 为 k 位数; 当 $5\cdot 10^{k-1}\leqslant n\leqslant 10^k-1$ 时,$2n$ 为 $k+1$ 位数. 由 $a(2,n)$ 的定义得到 n 为 k 位数时 $a(2,n)=n\cdot(10^k+2)$ 或者 $a(2,n)=n\cdot(10^{k+1}+2)$. 对任意充分大的正数 x,显然存在正整数 M 使得

$$5\cdot 10^M\leqslant x<5\cdot 10^{M+1}. \tag{2}$$

于是由前面的分析得到恒等式

$$\sum_{1\leqslant n\leqslant x}\frac{\sigma(n)}{a(2,n)}=\sum_{n=1}^{4}\frac{\sigma(n)}{a(2,n)}+\sum_{n=5}^{49}\frac{\sigma(n)}{a(2,n)}+\sum_{n=50}^{499}\frac{\sigma(n)}{a(2,n)}+\cdots+\sum_{n=5\cdot 10^{M-1}}^{5\cdot 10^M-1}\frac{\sigma(n)}{a(2,n)}+\sum_{5\cdot 10^M\leqslant n\leqslant x}\frac{\sigma(n)}{a(2,n)}=$$
$$\sum_{n=1}^{4}\frac{\sigma(n)}{n\cdot(10+2)}+\sum_{n=5}^{49}\frac{\sigma(n)}{n\cdot(10^2+2)}+\sum_{n=50}^{499}\frac{\sigma(n)}{n\cdot(10^3+2)}+\cdots+\sum_{n=5\cdot 10^{M-1}}^{5\cdot 10^M-1}\frac{\sigma(n)}{n\cdot(10^{M+1}+2)}+$$
$$\sum_{5\cdot 10^M\leqslant n\leqslant x}\frac{\sigma(n)}{n\cdot(10^{M+2}+2)}. \tag{3}$$

注意到式(2) $5\cdot 10^M\leqslant x<5\cdot 10^{M+1}$,取对数后得到估计式

$$M\ln 10+\ln 5\leqslant \ln x<\ln 5+(M+1)\ln 10,$$

或者

$$M=\frac{1}{\ln 10}\ln x+O(1). \tag{4}$$

对任意实数 $x>1$,注意到渐近公式

$$\sum_{n\leqslant x}\frac{\sigma(n)}{n}=\frac{\pi^2}{6}\cdot x+O(\ln x), \tag{5}$$

于是在式(3)中,对任意正整数 $1\leqslant k\leqslant M$,由式(5)得到估计式

$$\sum_{n=5\cdot 10^{k-1}}^{5\cdot 10^k-1}\frac{\sigma(n)}{n\cdot(10^{k+1}+2)}=\sum_{n\leqslant 5\cdot 10^k-1}\frac{\sigma(n)}{n\cdot(10^{k+1}+2)}-\sum_{n\leqslant 5\cdot 10^{k-1}}\frac{\sigma(n)}{n\cdot(10^{k+1}+2)}=\frac{\pi^2}{6}\frac{5\cdot 10^k-5\cdot 10^{k-1}}{10^{k+1}+2}+$$
$$O\left(\frac{k}{10^{k+1}}\right)=\frac{3\cdot\pi^2}{40}+O\left(\frac{k}{10^{k+1}}\right) \tag{6}$$

注意到无穷级数 $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{k}{10^k}$ 收敛,于是结合式(3),(4)及(6)可得

$$\sum_{1\leqslant n\leqslant x}\frac{\sigma(n)}{a(2,n)}=\sum_{n=1}^{4}\frac{\sigma(n)}{n\cdot(10+2)}+\sum_{n=5}^{49}\frac{\sigma(n)}{n\cdot(10^2+2)}+\sum_{n=50}^{499}\frac{\sigma(n)}{n\cdot(10^3+2)}+\cdots+\sum_{n=5\cdot10^{M-1}}^{5\cdot10^{M}-1}\frac{\sigma(n)}{n\cdot(10^{M+1}+2)}+\sum_{5\cdot10^M\leqslant n\leqslant x}\frac{\sigma(n)}{n\cdot(10^{M+2}+2)}=\sum_{k=1}^{M}\frac{3\cdot\pi^2}{40}+O\left(\sum_{k=1}^{M}\frac{k}{10^{k+1}}\right)=\frac{3\cdot\pi^2}{40}\cdot M+O\left(\sum_{k=1}^{\infty}\frac{k}{10^k}\right)=\frac{3\cdot\pi^2}{40\cdot\ln 10}\cdot\ln x+O(1).$$

于是证明了定理1中 $k=2$ 的情况.

现在证明定理1中 $k=4$ 的情况. 考虑到数列 $a(4,n)$ 的结构,设 n 的十进制表示式为 k 位数,即就是 $n=d_kd_{k-1}\cdots d_2d_1$,其中 $1\leqslant d_k\leqslant 9,0\leqslant d_i\leqslant 9,i=1,2,\cdots,k-1$. 于是由乘法的进位法则可知当 $\frac{1}{4}\cdot10^{k-1}\leqslant n\leqslant\frac{1}{4}\cdot(10^k-1)$ 时,$4n$ 为 k 位数;当 $\frac{1}{4}\cdot10^k\leqslant n\leqslant\frac{1}{4}\cdot(10^{k+1}-1)$ 时,$4n$ 为 $k+1$ 位数. 于是当 n 为 k 位数时,由 $a(4,n)$ 的定义得到 $a(4,n)=n\cdot(10^k+4)$ 或者 $a(4,n)=n\cdot(10^{k+1}+4)$. 对任意充分大的正数 x,显然存在正整数 M 使得

$$\frac{1}{4}\cdot10^M\leqslant x<\frac{1}{4}\cdot10^{M+1},\tag{7}$$

于是由前面的分析并结合式(5),可得到恒等式

$$\sum_{1\leqslant n\leqslant x}\frac{\sigma(n)}{a(4,n)}=\sum_{n=1}^{2}\frac{\sigma(n)}{a(4,n)}+\sum_{n=3}^{24}\frac{\sigma(n)}{a(4,n)}+\sum_{n=25}^{249}\frac{\sigma(n)}{a(4,n)}+\cdots+\sum_{n=\frac{1}{4}\cdot10^{M-1}}^{\frac{1}{4}\cdot10^M-1}\frac{\sigma(n)}{a(4,n)}+\sum_{\frac{1}{4}\cdot10^M\leqslant n\leqslant x}\frac{\sigma(n)}{a(4,n)}=$$
$$\sum_{n=1}^{2}\frac{\sigma(n)}{n\cdot(10+4)}+\sum_{n=3}^{24}\frac{\sigma(n)}{n\cdot(10^2+4)}+\sum_{n=25}^{249}\frac{\sigma(n)}{n\cdot(10^3+4)}+\cdots+\sum_{n=\frac{1}{4}\cdot10^{M-1}}^{\frac{1}{4}\cdot10^M-1}\frac{\sigma(n)}{10^M+4}+\sum_{\frac{1}{4}\cdot10^M\leqslant n\leqslant x}\frac{\sigma(n)}{10^{M+1}+4}=$$
$$\frac{\pi^2}{6}\frac{2-0}{10+4}+\frac{\pi^2}{6}\frac{24-2}{10^2+4}+\frac{\pi^2}{6}\frac{250-25}{10^3+4}+\cdots+\frac{\pi^2}{6}\frac{\frac{1}{4}\cdot10^M-\frac{1}{4}\cdot10^{M-1}}{10^M+4}+O\left(\sum_{k=1}^{M}\frac{k}{10^k}\right)=\frac{3\cdot\pi^2}{80}\cdot M+O\left(\sum_{k=1}^{M}\frac{k}{10^k}\right)\tag{8}$$

注意到式(7),于是得到估计式

$$M=\frac{1}{\ln 10}\ln x+O(1).$$

所以由式(8)得到渐近公式

$$\sum_{1\leqslant n\leqslant x}\frac{\sigma(n)}{a(4,n)}=\frac{3\cdot\pi^2}{80\cdot\ln 10}\cdot\ln x+O(1).$$

于是完成了定理1中 $k=4$ 的证明.

利用同样的方法也可以推出定理1中 $k=1,3,5,6,7,8,9$ 的结论.

现在证明定理2. 由于对所有整数 $1\leqslant k\leqslant 9$ 的证明方法类似,所以只讨论 $k=3$ 的情况. 考虑到数列 $a(3,n)$ 的结构,设 n 的十进制表示式为 k 位数,即就是 $n=e_ke_{k-1}\cdots e_2e_1$,其中 $1\leqslant e_k\leqslant 9,0\leqslant e_i\leqslant 9,i=1,2,\cdots,k-1$. 于是由乘法的进位法则可知当 $10^{k-1}\leqslant n\leqslant\underbrace{333\cdots3}_{k}$ 时,$3n$ 为 k 位数;当 $\underbrace{333\cdots34}_{k}\leqslant n\leqslant\underbrace{333\cdots33}_{k+1}$ 时,$3n$ 为 $k+1$ 位数. 于是当 n 为 k 位数时,由 $a(3,n)$ 的定义得到 $a(3,n)=n\cdot(10^k+3)$ 或者 $a(3,n)=n\cdot(10^{k+1}+3)$. 对任意充分大的正数 x,显然存在正整数 M 使得

$$\underbrace{333\cdots33}_{M}\leqslant x<\underbrace{333\cdots33}_{M+1}.\tag{9}$$

于是由前面的分析得到恒等式

$$\sum_{p\le x}\frac{p}{a(3,p)}=\sum_{1\le p\le 3}\frac{p}{a(3,p)}+\sum_{4\le p\le 33}\frac{p}{a(3,p)}+\sum_{34\le p\le 333}\frac{p}{a(3,p)}+\cdots+\sum_{\frac{1}{3}(10^{M-1}-1)+1\le p\le\frac{1}{3}(10^{M}-1)}\frac{p}{a(3,p)}+\sum_{\frac{1}{3}\cdot(10^{M}-1)+1\le p\le x}\frac{p}{a(3,p)}=\sum_{1\le p\le 3}\frac{1}{10+3}+\sum_{4\le p\le 33}\frac{1}{10^2+3}+\sum_{34\le p\le 333}\frac{1}{10^3+3}+\cdots+\sum_{\frac{1}{3}(10^{M-1}-1)+1\le p\le\frac{1}{3}(10^{M}-1)}\frac{1}{10^M+3}+\sum_{\frac{1}{3}(10^{M}-1)+1\le p\le x}\frac{1}{10^{M+1}+3}=\frac{\pi(3)}{10+3}+\frac{\pi(33)-\pi(3)}{10^2+3}+\frac{\pi(333)-\pi(33)}{10^3+3}+\frac{\pi(3333)-\pi(333)}{10^4+3}+\cdots+\frac{\pi(\frac{1}{3}\cdot(10^M-1))-\pi(\frac{1}{3}(10^{M-1}-1))}{10^M+3}+O\left(\frac{\pi(x)}{10^M}\right)=\sum_{r=1}^{M}\frac{3}{r\cdot 10\cdot\ln 10}+O\left(\sum_{r=1}^{M}\frac{1}{r^2}\right)=\sum_{r=1}^{M}\frac{3}{r\cdot 10\cdot\ln 10}+O(1). \quad (10)$$

注意到$\frac{1}{3}(10^M-1)\le x<\frac{1}{3}(10^{M+1}-1)$时有估计式$M=\frac{1}{\ln 10}\ln x+O(1)$以及$\sum_{1\le k\le M}\frac{1}{k}=\ln M+\gamma+O\left(\frac{1}{M}\right)$,其中$\gamma$为Euler常数. 于是由式(10)得到渐近公式

$$\sum_{p\le x}\frac{p}{a(3,p)}=\frac{3}{10\cdot\ln 10}\cdot\ln\ln x+O(1).$$

于是证明了定理2中$k=3$的情况. 类似地,可以推出定理2中k为其他正整数的情况. 从而完成了定理的证明.

参 考 文 献:

[1] F Smarandache. Sequences of Numbers Involved in Unsolved Problems [M]. Phoenix: Hexis,2006: 106.

[2] Nan W. On the Smarandache 3n-digital sequence and the Zhang Wenpeng's conjecture [J]. Scientia Magna,2008,4(4):120-122.

[3] 苟素. Smarandache 3n 数字数列及其他的渐近性质 [J]. 内蒙古师范大学学报: 自然科学汉文版,2010,39(6):450-453.
GOU Su. The smarandache 3n-digital sequence and its some asymptotic properties [J]. Journal of Inner Mongolia Normal University: Natural Science Edition,2010,39(6):450-453.

[4] 张文鹏. 初等数论 [M]. 西安: 陕西师范大学出版社,2007: 12-14.

[5] Tom M Apostol. Introduction to Analytical Number Theory [M]. New York: Spring-Verlag,1976: 41-42.

责任编辑: 董 瑾

(上接第7页)

[27] 张金川,徐波,聂海宽,等. 中国页岩气资源勘探潜力[J]. 天然气工业,2008,176(6):136-140,159.
ZHANG Jin-chuan,XU Bo,NIE Hai-kuan,et al. Exploration potential of shale gas resources in China [J]. Natural Gas Industry,2008,176(6):136-140,159.

[28] 董大忠,程克明,王世谦,等. 页岩气资源评价方法及其在四川盆地的应用[J]. 天然气工业,2009,29(5):33-39,136.
DONG Da-zhong, CHENG Ke-ming, WANG Shi-qian, et al. An evaluation method of shale gas resource and its application in the Sichuan Basin [J]. Natural Gas Industry, 2009,29(5):33-39,136.

[29] 李建忠,董大忠,陈更生,等. 中国页岩气资源前景与战略地位[J]. 天然气工业,2009,29(5):11-16.
LI Jian-zhong,DONG Da-zhong,CHEN Geng-sheng,et al. Prospects and strategic position of shale gas resources in China [J]. Natural Gas Industry,2009,29(5):11-16.

[30] 张金川,姜生玲,唐玄,等. 我国页岩气富集类型及资源特点[J]. 天然气工业,2009,29(12):109-114.
ZHANG Jin-chuan,JIANG Sheng-ling,TANG Xuan,et al. Accumulation types and resources characteristics of shale gas in China [J]. Natural Gas Industry, 2009, 29(12): 109-114.

责任编辑: 王 辉

reason, a servo control system of welding gun based on fuzzy PID is presented. This system is composed of host computer, PLC, AC servo controller, arc voltage sensor and image sensor, and fuzzy PID control algorithm is adopted for the control of the position and velocity of welding gun. The operation results of the system shown that it can improve the quality of welding seam and the efficiency of welding production, it will have wide application prospects in the welding field of titanium and rare metals.

Key words: vacuum plasma welding; welding gun; servo controller; fuzzy PID; PLC

ZHANG Nai-lu[1], *FU Long-fei*[1], *REN Yuan*[2], *SUN Guo-peng*[3], *ZHAO Qi*[1] (1. College of Electronic Engineering, Xi′an Shiyou University, Xi′an 710065, Shaanxi, China; 2. Western Supuerconducting Technologies Co. Ltd., Xi′an 710018, Shaanxi, China; 3. Xi′an Hailian Petrochemical Technology Co. Ltd., Xi′an 710065, Shaanxi, China) JXSYU 2011 V. 26 N. 2 p. 93-95

A new intelligent control system for highway street-lamps

Abstract: Single-chip microcomputer (SCM) control, active infrared detection and ZigBee wireless transmission technology are adopted in this system to realize the intelligent control of highway streetlamps. The different intelligent control algorithms are proposed, which can automatically control the switching of streetlamps according to whether vehicles passing or not and their passing directions. The intelligent control system can effectively save energy.

Key words: highway; street-lamp; Zigbee; intelligent control; algorithm

LIU Tian-shi, *LIU Shang*, *FU Chun* (College of Computer Science, Xi′an Shiyou University, Xi′an 710065, Shaanxi, China) JXSYU 2011 V. 26 N. 2 p. 96-98, 103

Modeling and simulation of the ecosystem based on multi-agent system

Abstract: In order to reappear real grassland ecosystem, an ecosystem model is established based on reactive agent using multi-agent modeling and simulation method. The ecosystem model not only retains the diversity of an eco-complex adaptive system but also shows the general characteristics of the ecosystem. The model is simulated on the simulation platform of NetLogo, and various real phenomena of grassland ecosystem can be shown by adjusting environmental factors and various parameters. Finally, the simulation results very the correctness and expansibility of this model.

Key words: multi-agent system; ecosystem; complex adaptive system; system modeling; simulation; NetLogo

CHENG Guo-jian, *YAN Yu-jia*, *QIANG Xin-jian*, *LI Zhen* (College of Computer Science, Xi′an Shiyou University, Xi′an 710065, Shaanxi, China) JXSYU 2011 V. 26 N. 2 p. 99-103

Error-tolerant encryption for secure multimedia communications

Abstract: Based on idea of error-tolerant encryption, an efficient selective error-tolerant encryption scheme is presented to overcome the drawbacks of multimedia video and audio under the traditional data encryption framework: not only the playing of multimedia files has slow speed but also it unable to tolerate any uncorrectable channel errors, and a little data decryption error may require to resent the information so to cause the reduction of system transmitting capability. The analysis shows that the proposed scheme can improve the network transmitting capability of bad communication channels, and the decrypted channel errors only has a linear impact to the original multimedia video and audio files.

Key words: error-tolerant encryption; multimedia; pseudo-random number; security

HE Bing-yan[1,2], *LI Hao*[3] (1. School of Information Engineering, Chang′an University, Xi′an 710064, Shaanxi, China; 2. School of Geology Engineering and Surveying, Chang′an University, Xi′an 710054, Shaanxi, China; 3. School of Sciences, Chang′an University, Xi′an 710054, Shaanxi, China) JXSYU 2011 V. 26 N. 2 p. 104-106

Hybrid mean value of Smarandache *kn* - digital series with divisor sum function

Abstract: For any positive integer k ($1\leqslant k\leqslant 9$), if the digits of $\{a(k,n)\}$ can be divided into two parts, and the second part is k times of the first part, the digital series $\{a(k,n)\}$ is called to Smarandache kn - digital series. The properties of the hybrid mean value of Smarandache kn - digital series with divisor sum function are studied using elementary and combinational methods, and two interesting asymptotic formulae for it are presented.

Key words: Smarandache kn - digital series; divisor sum function; hybrid mean value; asymptotic formula

GOU Su (School of Sciences, Xi′an University of Posts and Communications, Xi′an 710121, Shaanxi, China) JXSYU 2011 V. 26 N. 2 p. 107-110